

3次元多様体の崩壊とポアンカレ予想

GCOE「物質階層を紡ぐ科学フロンティアの新展開」 キックオフミーティング

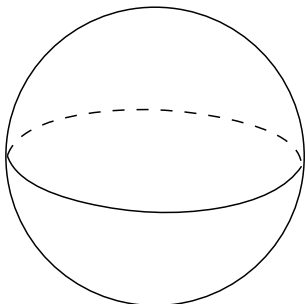
塩谷 隆

理学研究科 数学専攻

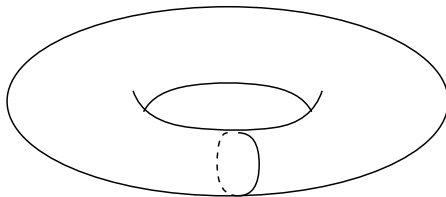
2008年9月28日

多様体の例

2次元多様体 = 曲面
(図形の表面のみ... 自由度が2次元)



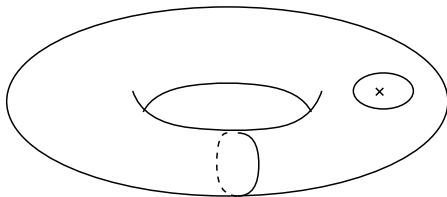
球面



トーラス

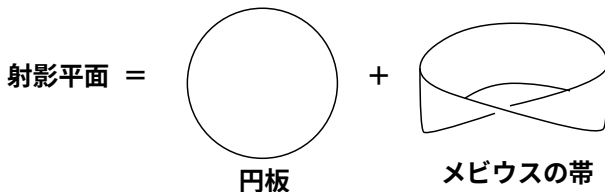
多様体の定義

2次元多様体 ... 多様体上に任意に一点をとり、その周りをくり抜くと、円板を変形したものが得られる。



射影平面

少し変わった例として...



3次元空間の中には実現できないが、
4次元空間の中には実現できる。

ポアンカレ予想

閉多様体 ... 無限遠方に伸びていなくて縁もない.
例：球面，トーラス，射影平面

ポアンカレ予想

閉多様体 ... 無限遠方に伸びていなくて縁もない.

例：球面，トーラス，射影平面

単連結 ... 多様体上に輪っかをとると必ず多様体上で変形して一点に縮めることができる.

例：球面 トーラスと射影平面は単連結でない.

ポアンカレ予想

閉多様体 ... 無限遠方に伸びていなくて縁もない.

例：球面，トーラス，射影平面

単連結 ... 多様体上に輪っかをとると必ず多様体上で変形して一点に縮めることができる.

例：球面 トーラスと射影平面は単連結でない.

2次元ポアンカレ予想（定理）

2次元 単連結 閉多様体は球面を変形したものに限る.

n 次元ポアンカレ予想

$n = 2 \dots$ 古くから知られていた.

$n \geq 5 \dots$ Smale (1961)

$n = 4 \dots$ Freedman (1982)

$n = 3$ (ミレニアム懸賞問題)

$\dots$ Perelman (2002, 2003), 2006 年に正しいと確認.
3次元閉多様体を完全に分類 (幾何化予想の解決)

$n \geq 3$ では次元が低いほど難しい!

リッチフローで多様体を変形する.

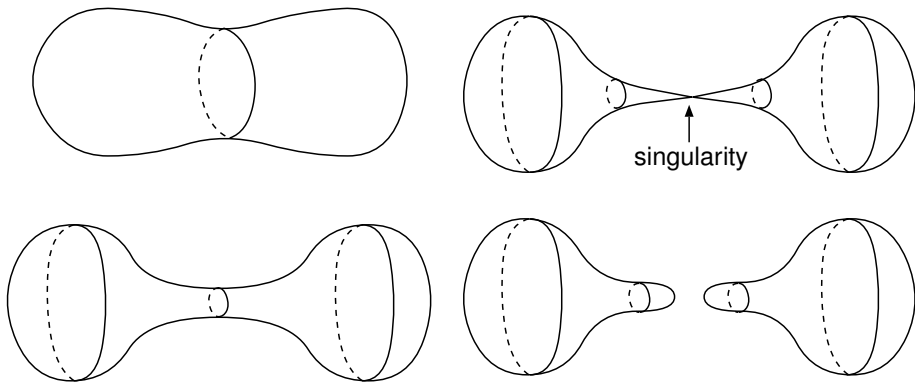
リッチフローの方程式：

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -2 \operatorname{Ric}$$

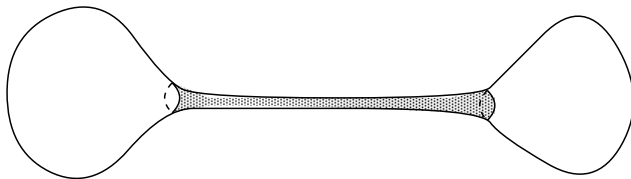
g ：リーマン計量... 多様体の形を決める量

Ric ：リッチ曲率... 多様体の曲がり方を表す量

手術つきリッチフロー



3次元多様体の崩壊



体積の小さい部分は特異点を沢山もった空間
(Alexandrov 空間) へ近付く.

体積崩壊定理 (塩谷・山口, Perelman)

断面曲率が下に有界かつ体積の小さい向き付け可能な
3次元閉多様体はグラフ多様体である.